Der fx991DE X im Mathematik-Unterricht

Analysis

Station 1

Gleichungen lösen

Gleichungen ziehen sich wie ein roter Faden durch den Alltag, angefangen bei Kindern, die noch im Kindergarten sind. Meistens werden Gleichungen im frühen Alter durch Ausprobieren gelöst.

In der Grundschule treten Gleichungen bei der Umkehrung von Aufgaben auf:

$2 + 3 = 5$ $3 + ? = 7$

$2 \cdot 3 = 6$ $3 \cdot ? = 12$

$3^2 = 9$ $?^2 = 25$ später auch $3^? = 81$

Gleichungen sind auch Grundlage zur Erweiterung des Zahlbereiches:

$3 + ? = 1$ $3 \cdot ? = 4$ $?^2 = 2$ $5^? = 10$ $?^2 = -1$

„Komplizierte“ Gleichungen treten beim Bearbeiten von Alltagsproblemen recht schnell auf, bis hin zu Differentialgleichungen.

Alle Gleichungstypen, die in der Unter- und Mittelstufe auftreten, können mit dem fx991DE X gelöst werden; viele aus der Oberstufen-Mathematik auch.

Dazu gibt es zwei prinzipiell verschiedene Vorgehensweisen:

1.1 Gleichungen „mit **X**“ eingeben und mit **SOLVE** lösen.

1.2 Über MENU (−) [A] (=Gleichungen/Funktionen) den Typ auswählen und lösen.

Bei diesem Vorgehen kann zwischen:

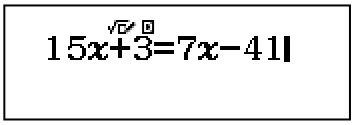
1 Gleichungssystemen,

2 Polynom-Gleichungen,

gewählt werden.

```
1:Gleichungssyst.
2:Polynom-Gleich.
```

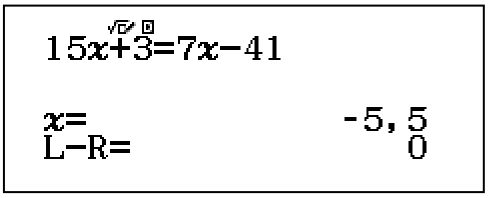
1.1 Gleichungen direkt eingeben



Beachte:

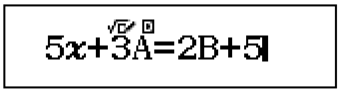
X sollte (muss aber nicht) die gesuchte Variable sein, alle anderen

Buchstaben (A, B, C, D, Y und M) können als Zielvariable oder als Parameter verwandt werden.

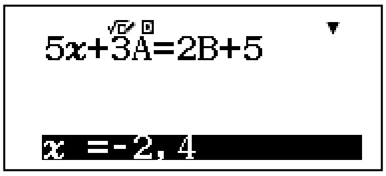


In der Gleichung das $\boxed{=}$ einsetzen (**oben links**).

Die Eingabe mit $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{=}$ beenden.



Bei Parametern:
Gleichung eingeben (s. o.) $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CALC}}$

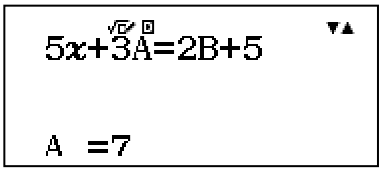


Danach werden die Werte der Parameter abgefragt und eingegeben: $\boxed{\blacktriangledown}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\blacktriangledown}$ $\boxed{=}$

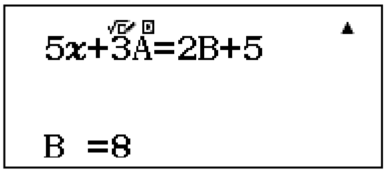
Der Startwert für x kann zum Schluss eingegeben werden.

Je dichter dieser Wert an der Lösung der Gleichung liegt,

desto schneller wird die Lösung gefunden.



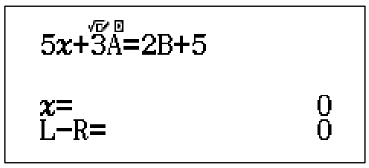
Nach erfolgreicher Bearbeitung zeigt der TR folgendes Bild:



In der oberen Zeile: Die Aufgabe

In der mittleren Zeile: Die Lösung (X = ……)

In der unteren Zeile: Die Güte der Lösung (L – R bedeutet: Linke – rechte Seite; steht hier eine 0, so ist die Lösung exakt.)



Beispiele: 5 X +3 = 10 $(x+2)^2$ - $(3-x)^2$ = 15 $X^X - 3 = 0$

Cos(x) = 0,5 $\frac{5}{X} = 7$

Ln(x) = 1,5 (x+2):(x-3) = 10

Das Auffinden der Lösung kann durchaus auch etwas dauern.

Achtung: Der Rechner findet nur eine Lösung! Wenn die Gleichung mehrere Lösungen hat, führen andere Startwerte für x evtl. auch zu anderen Lösungen.

Beispiele: $(x+2)^2 = 16$ Probieren Sie verschiedene Startwerte (-5; -3; 1: 3)

Anhaltspunkte für die Startwerte kann z.B. eine Wertetabelle liefern.

(„Wertetabelle erstellen“ wird in Station 2 behandelt)

Beispiele: Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

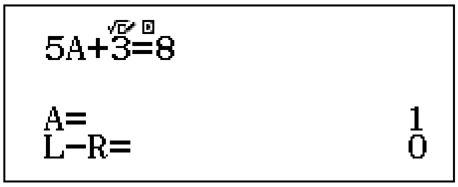
$\sin(X) = -0{,}2\,x$

An Sonderfällen erkennt man gut, wie sich der TR einer Lösung nähert:

Beispiel:

$e^{x} = 0$

Es ist auch möglich, Gleichungen zu lösen, in denen die Variable nicht mit X sondern mit einem anderen Buchstabe (A, B, C, D, Y, M) bezeichnet ist. Das Vorgehen ändert sich dadurch nicht.



Einsatz im Unterricht: z. B. Bei Aufgaben, deren Lösung (noch) unbekannt ist: z. B.

$\pi \cdot x^2 = 2 \cdot \pi \cdot a^2$ (doppelte Kreisfläche)

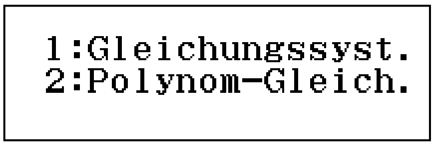
$2\,K_0 \cdot = K_0 \cdot (1+p\%)^n$ (Kapitalverdopplung, p und n als Parameter)

1.2 Gleichungen lösen im EQN-Modus

Mit den Befehlen MENU (−) [A] gelangt man in den Lösungmodus-Modus. Hier können

- Gleichungssysteme (mit 2, 3 oder 4 Unbekannten)
- Polynomgleichungen (2ten, dritten oder vierten Grades)

gelöst werden.

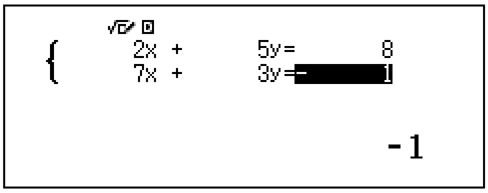


1.2.1 Gleichungssysteme

Bei der Eingabe ist zu beachten, dass die Gleichungen in der Form a*x + b*y (+c*z) + (d*t) = e   vorliegen müssen.

Gegebenenfalls müssen sie vorher erst in diese Form gebracht werden.

Die Koeffizienten werden zeilenweise eingegeben, die Eingabe jeweils mit = abgeschlossen.



Nach der letzten Eingabe erneut = und die Lösungen werden angezeigt. Mit ▼ kommt man zur nächsten Lösung, mit = oder AC am Ende wieder zur Eingabe zurück um z.B. einzelne Koeffizienten zu ändern.

Der Rechner kann nur Gleichungssysteme lösen, die eine eindeutige Lösung haben. In allen anderen Fällen meldet er sich mit **„Keine Lösung“** oder **„ unendl. Viele L.“** und das Gleichungssystem muss dann mit den bekannten Verfahren klassisch nachbearbeitet werden.

Beispiele:

3X + 5Y = 3	3X + 5Y = 3	3X + 5Y = 3	3X + 5Y = 3	3X + 5Y = 3
5x + 3Y = -3	3X + 3Y = -3	2,9X + 5 Y = -3	2,99X + 5Y = -3	2,999X + 5Y = -3

Sehr interessant ist auch die Untersuchung von Gleichungssystemen, die nach einem „Strickmuster“ aufgebaut sind:

5x + 7y = 9   (immer + 2)   und   11x + 15y = 19 (immer + 4)

Versuchen Sie es selbst mit anderen Beispielen! Lassen Sie sich überraschen! Diese Erfahrungen sind eine gute Anregung für Beweise.

Beispiel für **drei Gleichungen mit drei Variablen**

(Nach T. Schwarzer, Bad Nauheim, CASIO-forum 1/2008)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

+3x + 1y + 2z = 0
-1x + 3y + 1z = 5
+1x + 1y +az = 2

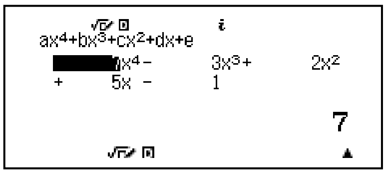
Bestimmen Sie die Lösungsmengen für a = 3 und für a= 0.

Untersuchen Sie den Wert des Terms, wenn sich a immer mehr der Zahl +1 nähert.

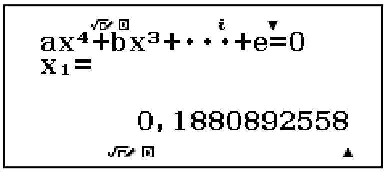
Begründen Sie, warum der TR für a = 1 keine Lösung liefert.

1.2.2 Polynom-Gleichungen bis zum Grad 4

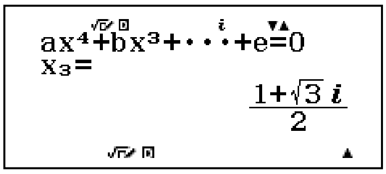
Die Gleichungen müssen in der angegebenen Form vorliegen:



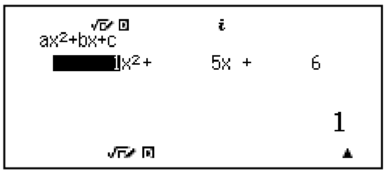
$(ax^4) + (bx^3) + cx^2 + dx + e = 0$



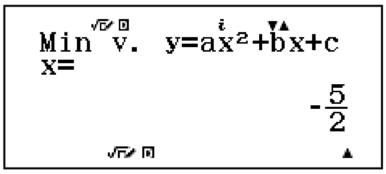
Die Koeffizienten werden der Reihe nach eingegeben und mit abgelegt, mit dem letzten geht es zu den Lösungen, mit bzw. kann zwischen den Lösungen gewechselt werden.



- Es werden auch konjugiert komplexe Lösungen angezeigt.
- Doppelte, drei- oder vier fache Lösungen werden nur einmal angezeigt.



ABER: Bei quadratischen Gleichungen wird der Extremwert der entsprechenden Funktion angezeigt. Daraus kann entnommen werden, dass eine doppelte Nullstelle vorliegt. Beispiel $1x^2 + 4x + 4 = 0$



Um herauszufinden, welche der beiden Lösungen einer Gleichung dritten Grades doppelt ist, hilft z.B. eine Wertetabelle.

Bespiele:

$X^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$x^3 + 6036\,x^2 + 12\,144\,432\,x + 24\,434\,597\,184 = 0$

$x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}73x - 0{,}33 = 0$

Die erste Gleichung ist mit einer Polynomdivision sicher noch lösbar, die zweite und dritte vermutlich nicht mehr.

Fazit: Die alte Regel, nach der ganzrationale Funktionen Nullstellen haben mussten, die ganzzahlig waren und zwischen -5 und +5 zu liegen haben, gilt nicht mehr.

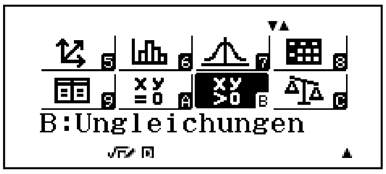
Der fx991DE X im Mathematik-
Unterricht

Analysis

Station 2

Ungleichungen

Der fx991 DE X unterscheidet sich von seinen Vorgängern auch durch die Fähigkeit, **Ungleichungen lösen** zu können.



Durch MENU °’’’ [B] wird das Lösen von Ungleichungen aufgerufen.

Dann ist zwischen quadratischen, kubischen Ungleichungen oder Ungleichungen vie-ten Grades zu wählen, danach noch die Art der Ungleichung (> 0, < 0 ≤ 0 oder ≥ 0).

Das erleichtert Funktionsuntersuchungen ganz erheblich. Zum Skizzieren des Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades werden dadurch nicht nur die Nullstellen angeboten sondern auch noch die Information, auf welcher Seite der x-Achse der Graph zwischen den Nullstellen verläuft. Dadurch kann der Graph sehr rasch skizziert werden. Außerdem kann so auch festgestellt werden, ob eine zuvor gefundene Nullstelle zugleich ein Extremwert oder gar ein Stufenpunkt ist. Wird zusätzlich zur ganzrationalen Funktion dritten Grades auch noch deren Ableitung auf diese Weise untersucht, so kann die vorher gewonnene Vermutung durch die Information über das Steigen oder Fallen des Funktionsgraphen noch gesichert werden.

Beispiel: Skizzieren Sie den Graph der Funktion: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7{,}75x + 15$

Die Frage nach den Nullstellen führt zu - 2,5 / 4 / 1,5

Die Frage nach den Bereichen, in denen der Graph **über** der x-Achse verläuft, ergibt:

$a \leq x \leq b;\ c \leq x$

$$-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2};\ 4 \leq x$$

Die Frage, in welchen Bereichen der Funktionsgraph fällt, ist durch das Lösen der Ungleichung $f'(x) = 3x^2 - 6x - 7{,}75 \leq 0$ zu beantworten:

$a \leq x \leq b$

$$\frac{6-\sqrt{129}}{6} \leq x \leq \frac{6+\sqrt{129}}{6}$$

Damit ist auch schon der (exakte!) x-Wert der Extremwerte bekannt.

Weitere Übungsbeispiele: $g(x) = x^3 + x^2 - 13{,}75x - 7$

$h(x) = x^3 + 7x^2 + 2{,}25x + 2{,}5$

Da der Graph der Funktion h(x) nur eine Nullstelle aufweist, hilft hier ein Trick für eine rasche und gute Skizze. Außer dem Schnittpunkt mit der x-Achse (y = 0) werden auch die Schnittpunkte mit Parallelen zur x-Achse herangezogen: h(x) =2 , h(x) = 4 usw.

Analysis

Station 3

Funktions-
untersuchungen

Untersuchen Sie die Funktion **$f(x) = 0{,}4x^3 - 1{,}4x^2 - 2x + 4{,}8$**

1.1 Lage der Nullstellen, Extremwerte, Zeichnung (Skizze)

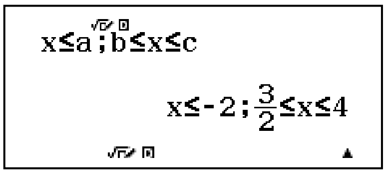
1.2 Steigung der Tangente in den Nullstellen.

1.3 Skizzieren Sie den Funktionsgraph und den der Ableitung in ein Koordinatensystem

1.4 Fläche, die der Funktionsgraph mit der x-Achse einschließt.

1.1 Lage der Nullstellen, Zeichnung

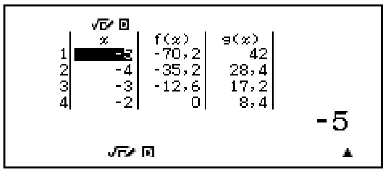
Die Bestimmung der **Nullstellen** ist Gegenstand der Station 1. Hier daher nur die Kurzfassung:
MENU (–) 2 3 (Kubische Gleichung)
Koeffizienten eingeben, mit = bestätigen.
Mit = werden die Lösungen berechnet, ablesen. Mit ▼ und ▲ kann zwischen den Lösungen gewechselt werden.



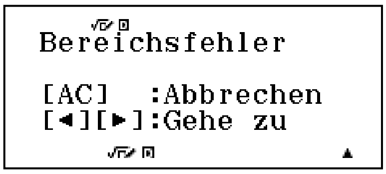
Für eine **erste Skizze** können Ungleichungen hilfreich sein (Station 2). Auch hier die Kurzfassung. f(x) ≤ 0 MENU ∘,,, 3 4 (Kubische Ungleichung), Koeffizienten eingeben, mit = bestätigen.
Mit = werden die Lösungen berechnet, ablesen, in die Skizze eintragen.

Das **Steigungsverhalten und die Extremwerte** können über das Lösen der Ungleichung h'(x) ≥ 0 herausgefunden werden.

Für eine saubere Zeichnung wird eine **Wertetabelle** erstellt:



MENU 9 ist die Grundeinstellung zur Eingabe beliebiger Funktionen von denen eine Wertetabelle gewünscht wird. Die Funktion eingeben, mit = bestätigen. Anschließend kann eine zweite Funktion g(x) eingegeben werden. Hier kann es sinnvoll sein, gleich die Ableitung anzugeben. Danach fragt der Rechner nach dem Startwert für die Wertetabelle, dem Endwert und der Schrittweite. Die Eingabe jeweils mit = bestätigen.



Danach wird die Wertetabelle erstellt. Achtung: Der Speicher für die Tabellenwerte ist begrenzt, mehr als 30 Tabellenwerte können nicht auf einmal angezeigt werden. Die Meldung „Bereichsfehler" wird beim Überschreiten dieser Begrenzung angezeigt.

Vielleicht reicht für eine erste Übersicht eine größere Schrittweite?
Eine einmal erstellte Tabelle kann mit AC gelöscht werden, danach können Start- und Endwert sowie die Schrittweite erneut eingegeben werden.

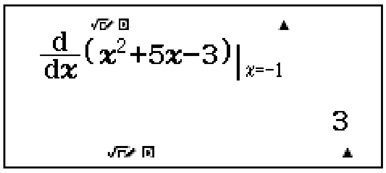
Aufgabe:
Erstellen Sie eine Wertetabelle, skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion. Wählen Sie im Bereich der Extremwerte eine kleinere Schrittweite um einen genaueren Verlauf des Graphen zu erhalten.

1.2 Die Steigung der Tangente in den Nullstellen

Der fx991DEX kann die Steigung einer Tangente in einem bestimmten Punkt einer Funktion numerisch berechnen.

Dazu muss erst wieder in den Grundmodus gewechselt werden: MENU 1

Nach der Eingabe von $(\frac{d}{dx}\blacksquare)$ wird zuerst die Funktion und dann der x-Wert des Punktes in dem die Steigung der Tangente gesucht wird, eingeben; mit [=] wird die Berechnung gestartet.



Das Ergebnis wird angezeigt, wenn gewünscht, kann es gespeichert werden.

z. B.: STO A, mit [▲] geht es zur Aufgabe zurück.

Jetzt kann z.B. der x-Wert geändert werden. usw.

Mit diesem Vorgehen kann auch überprüft werden, ob die Steigung der Tangente in den (vermuteten) Extremwerten tatsächlich 0 ist. (Anmerkung: Da der TR die Steigung der Tangente numerisch bestimmt, wird der Wert der Tangentensteigung häufig nur eine sehr kleine Zahl sein und nicht exakt 0.)

1.3 Zum Erstellen des Graphen kann jetzt der QR-Code aufgerufen werden und so eine Skizze des Graphen im Display des Handys aufgerufen werden.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Steigungen der Tangenten in den Nullstellen der Funktion.

Zeichnen Sie diese Tangenten auch in den Funktionsgraphen ein.

Überprüfen Sie, ob die Tangenten in den nach der Wertetabelle vermuteten Extremwerten tatsächlich waagerecht verlaufen.

1.4 Fläche, die der Funktionsgraph mit der x-Achse einschließt.

Der fx991 DE X kann ein bestimmtes Integral (numerisch) berechnen.

Dazu muss der Rechner im Grundmodus sein.

[$\int$], die Funktion eingeben und danach die Grenzen des Integrals.

Wenn man das möchte, kann man mit [Abs] auch gleich den Betrag des bestimmten Integrals bestimmen lassen.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Fläche, die der Graph von f(x) mit der x-Achse einschließt.

Bestimmen Sie die Fläche die die Graphen von f(x) und von $g(x) = x^2 - 4x$ miteinander einschließen.

Anmerkungen:

1) Das Integral kann nur für Berechnungen verwandt werden. In Gleichungen oder Funktionen (etwa als Flächeninhaltsfunktion) kann es nicht eingebaut werden.

2) Soll die Fläche berechnet werden, die von zwei Funktionsgraphen begrenzt wird, so kann auch das Integral des Betrages der Differenzfunktion berechnet werden. Der Rechenvorgang dauert etwas länger, dafür entfällt das Bestimmen der Schnittpunkte und das abschnittsweise Berechnen der Flächen. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Der fx991DE X im Mathematik-Unterricht

Analysis

Station 4

Grenzwerte

Bestimmen von Grenzwerten

Unter Ausnutzung der Taste $\boxed{\text{CALC}}$ ist es möglich, einen eigegebenen Term für verschiedene Werte einer Variablen berechnen zu lassen.

Das kann man dann mit z. B. immer größer werdenden Werten für x mehrmals nacheinander ausführen und dadurch ein Gespür entwickeln, welchen Wert der Grenzwert annehmen könnte und wie rasch er erreicht wird.

Beispiel: $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln\sqrt{|x-1|}} = ?$$

Eingabe des Terms $\boxed{\text{CALC}}$ Eingabe eines Wertes für X $\boxed{-}$

Ergebnis ablesen

Mit CALC wird eine abermalige Berechnung gestartet.

Ausprobieren mit x-Werten, die sich zuerst steigend und danach - in einer zweiten Serie - fallend der Null nähern.

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{A \to 0} \int_A^1 \ln(x)dx \qquad 0 \leq A \leq 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right| = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = ?$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x) = ?(x \succ 0)$$

Der fx991DE X im Mathematik-Unterricht

Analysis

Station 5

Extremwertaufgaben

Wie ist eine (Streichholz-) Schachtel mit dem Volumen V = 250 cm³ zu konstruieren, damit bei ihrer Herstellung möglichst wenig Material gebraucht wird?

Ohne einen TR wie der fx991 DE X ist die Auswahl an (gut) lösbaren Extremwertaufgaben doch sehr eingeschränkt. Gerade beim Betrachten von Alltagsproblemen ergeben sich schnell Extremwertaufgaben, die deutlich komplizierter sind, als die im Unterricht behandelten. Ein Beispiel, an dem gezeigt wird, wie man mit komplizierteren Aufgabenstellungen umgehen kann, ist das Entwerfen einer Streichholzschachtel (nach A. Zitterbart, Triberg, CASIO-forum 1/2008, dort aber mit einer Lösung, bei der der Taschencomputer eingesetzt wird).

Aus einer Skizze entnimmt man leicht, wie der **Materialbedarf** berechnet wird:

$M(a,b,c)= 3ab + 5bc + 2ac + 4c^2 + 0,25b$

Hier kann wegen der Volumenbedingung ($250\ cm^3 = a*b*c$)

a durch 250 / bc ersetzt werden:

$M(b,c) = 750/c + 5bc + 500/b + 4c^2 + 0{,}25b$

Die partielle Ableitung nach b muss den Wert Null annehmen. Das ergibt:

$b^2 = 2000 / (20c+1)$

Eingesetzt führt es zu einer komplizierten Funktion M(c), deren Minimum aus einer immer feiner strukturierten Wertetabelle entnommen werden kann.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Maße einer optimierten Streichholzschachtel mit dem Volumen 250cm³. (Lösung: 131,1 mm ; 36,8 mm; 51,8 mm)

Wie ändert sich das Ergebnis bei anderen Volumenvorgaben?

Sind die real existierenden Streichholzschachteln optimiert?

Der fx991DE X im Mathematik-Unterricht

Analysis

Station 6

Modellieren

Hier wird an einem Beispiel beschrieben, wie der TR zu gegebenen (Funktions- oder Mess-)werten eine Ausgleichfunktion bestimmt.

Aufgabe:

- Bestimme den (rotierenden) Funktionsgraphen, der die Form eines Sektglases besonders gut beschreibt.
- Berechne das Volumen des Sektglases.
- Ermittle, in welcher Höhe der Eichstrich für 0,1 ltr anzubringen ist.

Dazu finden Sie an der Station nicht nur ein Sektglas sondern auch einen Wachs- und mehrere Gipsabdrücke eines Sektglases. Wachsabdrücke sind hier besonders gut geeignet, weil sie sich nach dem Erkalten und dem anschließenden Abkühlen in der Kühltruhe leicht aus dem Sektglas entnehmen lassen. Diese Abdrücke können dann mit einer Schieblehre nach Höhe über dem Scheitelpunkt und Durchmesser in dieser Höhe vermessen werden.

Die **Messwerte** (alle Maße in mm): **Eingegeben wird:**

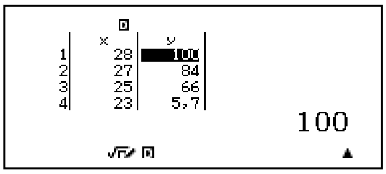
Durchmesser (2xr)	Höhe (y)	**x**	**y**
56	100	28	100

54	84	27	84
50	66	25	66
46	54,7	23	54,7
40	36,7	20	36,7
34	24,5	17	24,5
26	16,5	13	16,5
18	10	9	10

Überlegen Sie zunächst die Lage des Koordinatensystems und den vermuteten Funktionstyp (der kann später auch noch geändert werden).

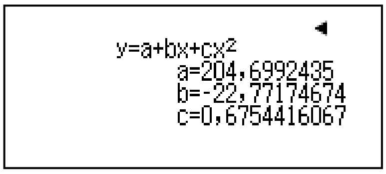
Eingabe der Werte über

MENU 6 3 (Parabel)? 4 (ln)? ▼ 1 (e-Fkt)?
Ausgabe:

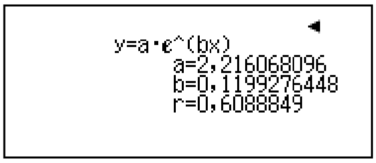


OPTN 4

liefert die gesuchten Koeffizienten des gewählten Funktionstyps,



Mit OPTN 1 ▼ 1
kann auch der Funktionstyp noch geändert werden.



Mit der gefundenen Funktion kann dann durch Integration das Rotationsvolumen bestimmt werden.

Durch eine variable obere Grenze dieses Integrals ist auch die Lage des „0,1-Eichstrichs“ zu bestimmen.

Der fx991DE X im Mathematik-Unterricht

Analysis

Station 8

Gleichungen mit Differential und Integral

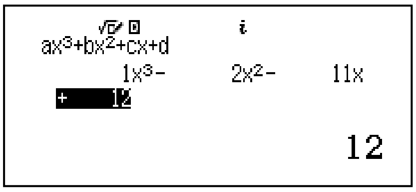
Aufgabe: Gegeben ist die Funktion **$f(x) = 0,25\,(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$**

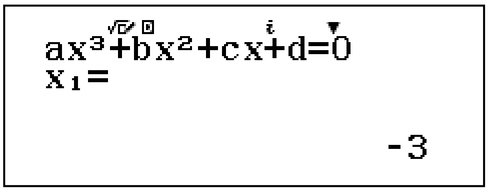
Geben Sie wichtige Eigenschaften des Funktionsgraphen an und skizzieren sie ihn.

Der Graph dieser Funktion wurde bereits in der Station 7 bearbeitet. Das dort beschriebene Werkzeug ist die doppelte Wertetabelle. Hier soll eine Bearbeitung mit der SOLVE-Funktion beschrieben werden.

Zuerst die Lage der Nullstellen:

Die Nullstellen können als Lösungen der Gleichung 3. Grades bestimmt werden:

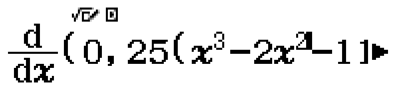


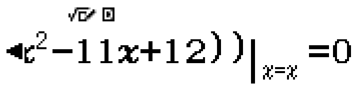


usw.

$x_1 = -3$; $x_2 = 1$ und $x_3 = 4$

Daraus kann vermutet werden, dass zwischen den Nullstellen jeweils ein Extremwert liegen muss. Diese können auch mit dem SOLVE-Befehl und dem Ableitungsoperator leicht gefunden werden:





Als Startwert wird -1 gewählt, zwischen -3 und +1

$$\frac{d}{dx}(0,25(x^3-2x^2-11 \triangleright \qquad x=-1$$

$$\frac{d}{dx}(0,25(x^3-2x^2-11 \triangleright \qquad x= -1,360920843 \quad L-R= 0$$

Das Ergebnis: Das Maximum liegt bei x = -1,36

Auch das Minimum kann auf diese Weise gefunden werden. Dazu muss nur der Startwert auf 2,5 geändert werden:

$$\frac{d}{dx}(0,25(x^3-2x^2-11 \triangleright \qquad x=2,5$$

$$\frac{d}{dx}(0,25(x^3-2x^2-11 \triangleright \qquad x= 2,694254177 \quad L-R= 0$$

Die Nullstelle der zweiten Ableitung (der Wendepunkt) kann ohne Differentialrechnung nicht ermittelt werden.

$$\frac{d}{dx}(0,25(3x^2-4x-1 \blacktriangleright \qquad \blacktriangleleft(3x^2-4x-11)\Big|_{x=x}=0$$

Als Startwert kann jetzt x = 0 gewählt werden:

$$\frac{d}{dx}(0,25(3x^2-4x-1 \triangleright \qquad x=0$$

$$\frac{d}{dx}(0,25(3x^2-4x-1 \triangleright \qquad x= 0,6666666667 \quad L-R= 0$$

Damit ist auch der x-Wert des Wendepunktes ermittelt.

Die zugehörigen Funktionswerte können mit dem CALC-Befehl leicht bestimmt werden:

Für den Wendepunkt:

$$0,25(x^3-2x^2-11x+1 \triangleright \qquad x=0,6666666667$$

$$0,25(x^3-2x^2-11x+1 \triangleright \qquad 1,0\overline{185}$$

Für das Maximum:

$0,25(x^3-2x^2-11x+1\triangleright$

$x = -1,360920843$

$0,25(x^3-2x^2-11x+1\triangleright$

$5,186337289$

Für das Minimum:

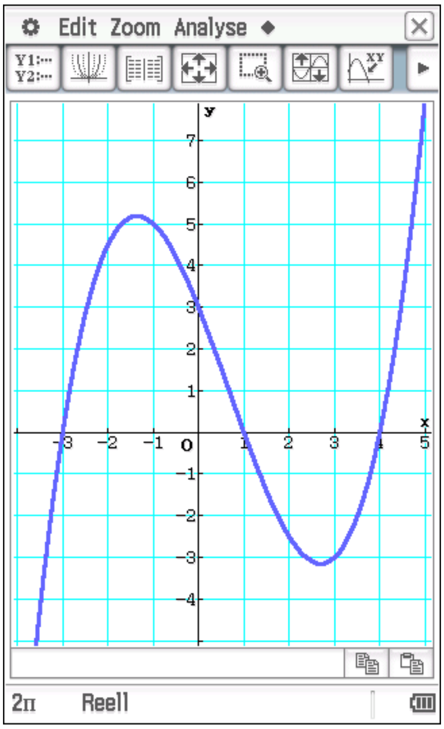
$0,25(x^3-2x^2-11x+1\triangleright$

$x = 2,694254177$

$0,25(x^3-2x^2-11x+1\triangleright$

$-3,149300252$

So könnte dann die Skizze aussehen:



Fragen zu verschiedenen Flächen könnten sich anschließen.

z.B. die nach der oberen Grenze b mit der das Integral von 0 bis b den Wert Null annimmt.

Die drei verschiedenen Lösungen dieser Aufgabe können auch mit dem SOLVE-Befehl gefunden werden. Aus der Grafik kann abgeschätzt werden, dass die drei gesuchten Lösungen sein werden:

$b_1 = -4$; $b_2 = 2$ und $b_3 = 5$

$\int_0^x 0,25(x^3-2x^2-11x\blacktriangleright$ $\blacktriangleleft-2x^2-11x+12)\,dx=0$

Der Ansatz

$\int_0^x 0,25(x^3-2x^2-11x\triangleright$ $x=-4$	führt zu	$\int_0^x 0,25(x^3-2x^2-11x\triangleright$ $x=\ -4,529653515$ $L-R=\ 0$
$\int_0^x 0,25(x^3-2x^2-11x\triangleright$ $x=2$	liefert das Ergebnis	$\int_0^x 0,25(x^3-2x^2-11x\triangleright$ $x=\ 2,065215528$ $L-R=\ 1,724454\times 10^{-14}$
$\int_0^x 0,25(x^3-2x^2-11x\triangleright$ $x=5$	führt zur Lösung	$\int_0^x 0,25(x^3-2x^2-11x\triangleright$ $x=\ 5,131104654$ $L-R=\ 0$

Der fx991DE X im Mathematik-Unterricht

Analysis

Station 7

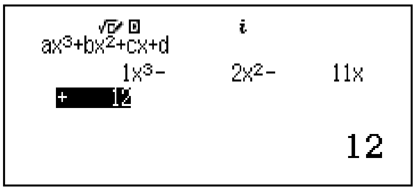
Funktionsunter-suchungen mit Wertetabellen

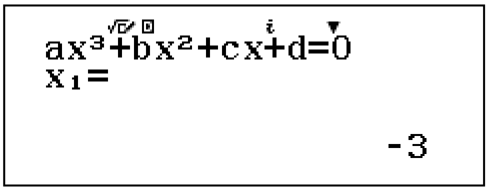
Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}25\,(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$

Geben Sie wichtige Eigenschaften des Funktionsgraphen an und skizzieren sie ihn.

Der y-Achsenabschnitt ist auch ohne Rechnereinsatz bei f(0) = 3 leicht gefunden.

Die Nullstellen können als Lösungen der Gleichung 3. Grades bestimmt werden:

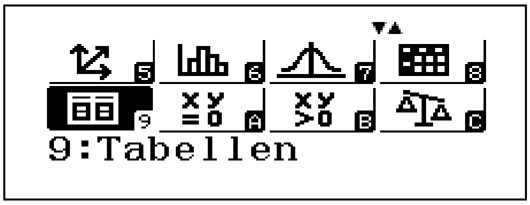




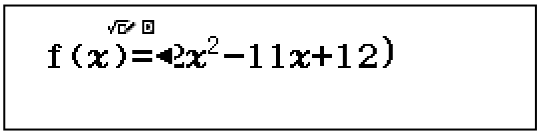
usw.

$x_1 = -3$; $x_2 = 1$ und $x_3 = 4$

Um einen Überblick über den Funktionsgraphen zu bekommen, sollte eine Wertetabelle erzeugt werden.



Dazu wird im Menu 9 der Funktionsterm als f(x) eingegeben.



Als zweiten Funktionsterm g(x) kann die Ableitung von f(x) gewählt werden.

$$g(x)=\frac{d}{dx}\left(0,25x^3-0,\right.\blacktriangleright$$

Als Bedingung wird die Stelle x = x gewählt.

$$g(x)=\blacktriangleleft-\frac{11x}{4}+3\Big)\Big|_{x=x}$$

Durch die Bestimmung der Nullstellen kann der Tabellenbereich gleich gut gewählt werden.

```
Tabellenbereich
 Start:-4
 Ende :5
 Inkre:0,5
```

	x	f(x)	g(x)
1	-4	-10	13,25
2	-3,5	-4,218	9,9375
3	-3	0	7
4	-2,5	2,8437	4,4375

-4

Im 3. Quadranten steigt der Graph sehr steil an.

Hier ist die Nullstelle bei -3 zu sehen.

	x	f(x)	g(x)
5	-2	4,5	2,25
6	-1,5	5,1562	0,4375
7	-1	5	-1
8	-0,5	4,2187	-2,062

-0,5

Zwischen (-1,5/5,16) und (-1/-5) liegt ein Maximum vor.

	x	f(x)	g(x)
9	0	3	-2,75
10	0,5	1,5312	-3,062
11	1	0	-3
12	1,5	-1,406	-2,562

1,5

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist 3.

In der Umgebung von (0,5/1,5) liegt ein Wendepunkt vor.

	x	f(x)	g(x)
13	2	-2,5	-1,75
14	2,5	-3,093	-0,562
15	3	-3	1
16	3,5	-2,031	2,9375

2

Die zweite Nullstelle liegt bei x = 1.

Zwischen 2,5 und 3 liegt ein Minimum vor.

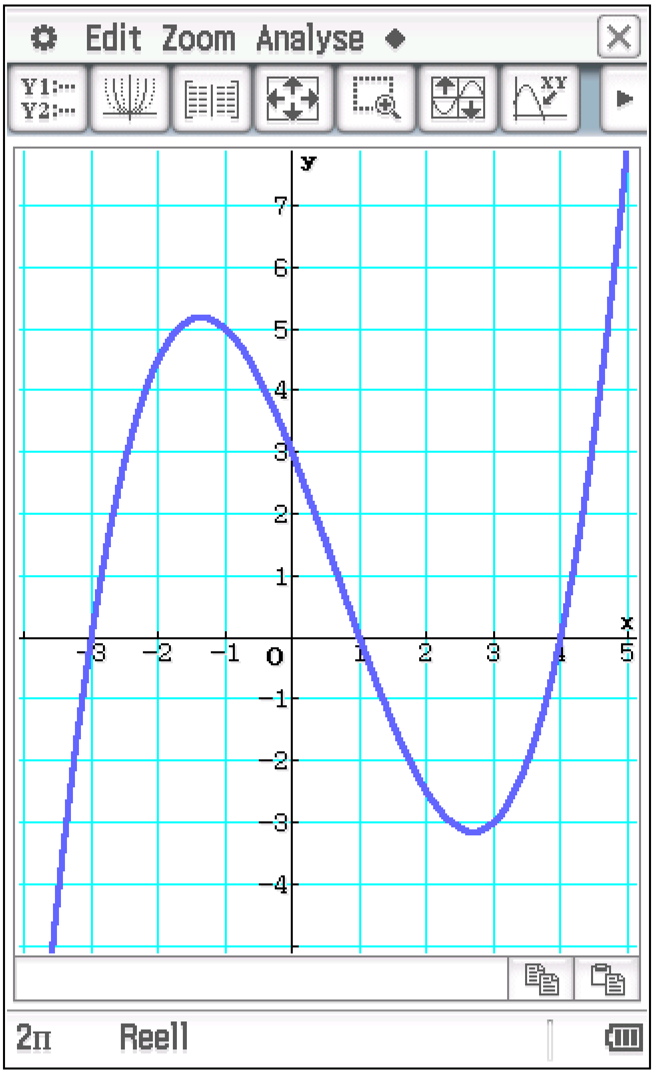
	x	f(x)	g(x)
17	4	0	5,25
18	4,5	3,2812	7,9375
19	5	8	11
20			

Bei x = 4 ist die dritte Nullstelle zu sehen.

Im 1. Quadranten steigt der Graph der Funktion sehr steil an.

Durch einen entsprechend gewählten Tabellenbereich und eine kleinere Schrittweite (z. B. jetzt 0,1) können die gesuchten Punkte weiter eingegrenzt werden.

Mit diesen Angaben ist schon eine sehr gute Skizze möglich.



So ähnlich könnte dann das Ergebnis aussehen.

Zum Festigen:

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion **f(x) =** $\frac{1}{7}x^7 - x^2 + 2$

Geben Sie wichtige Eigenschaften des Funktionsgraphen an und skizzieren sie ihn.